Mutfried HARTMANN, Rainer LOSKA, Nürnberg

Wie können Inhalte vernetzt werden, um die Nachhaltigkeit des Lernens zu verbessern?

In den letzten Jahren scheint in der Sekundarstufe das Problem der mangelnden Nachhaltigkeit zu einem Kernproblem des Unterrichts geworden zu sein. Wir wollen zeigen, wie die Nachhaltigkeit des Lernens durch verschiedene Formen des Vernetzens gestützt werden kann.

1. Vernetzen von Repräsentationsformen

Während die Verwendung von Bildern und Handlungen während der Einführungsphasen im Unterricht durchaus gebräuchlich sind, stehen in späteren Phasen, insbesondere des Übens, vorwiegend abstrakte Regeln und Formeln im Vordergrund. Erfahrungsgemäß treten hier die Probleme auf. Viele Schüler erinnern sich nicht mehr genau an die Regeln oder Formeln bzw. wissen sie nicht mehr, welche wofür zutreffen. Infolge der Abspeicherung der Inhalte rein als Zeichenkette verwechseln sie z.B. die Formel für die Kreisfläche mit der des Kreisumfangs, vermischen beide Formeln („$A=2\pi r^2$“) oder reduzieren sie gar auf die Kreiszahl π. Um dies zu vermeiden, sollten Formeln mit sinnstiftenden Vorstellungen eng verknüpft werden. Darauf sollte der Unterricht vielfältig hinarbeiten. Etwa kann in der Erarbeitungsphase durch eine Grobabschätzung (Abb. 1) geklärt werden, dass der Kreisflächeninhalt größer als zwei und kleiner als vier Radiusquadrate ist. Durch Wägeversuche mit Pappkreis und –quadraten wird nicht nur festgestellt, dass der Kreisfläche etwas mehr als drei Radiusquadrate entsprechen. Eine mathematisch anspruchsvollere Bestimmung von π soll dadurch nicht ausgeschlossen werden. Das wesentliche Ziel bei der hier vorgeschlagenen Vorgehensweise ist, dass die realen Objekte durch einen Prozess der Interiorisation in den Köpfen der Schüler zu mentalen Objekten werden. Entsprechend sollte als Verdichtung des Prozesses parallel zur Formel eine prägnante ikonische Repräsentation des Sachverhalts notiert werden (Abb. 2).

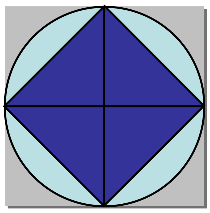

Abb. 1

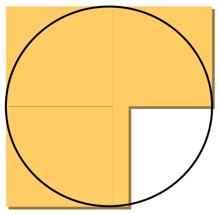

Abb. 2

Von zentraler Bedeutung ist es, dass auch in späteren Phasen des Unterrichts die Verbindung von sinnstiftendem Bild und abstrakter Aussage immer wieder wach gehalten wird.

Das Gelernte kann dadurch besser rekonstruiert werden, da sich mentale Bilder, Handlungsvorstellungen und abstrakte Aussagen gegenseitig stützen und kontrollieren.

2. Innermathematisches Vernetzen

Eine weitere fruchtbare Form des Vernetzens besteht darin, die innermathematischen Bezüge zu nutzen und bewusst zu machen. Dazu eignen sich insbesondere das Analogisieren, das Modularisieren und das Schaffen von Übersichtswissen.

Analogisieren. Analogisieren kann bedeuten, ausgehend von Bekanntem etwas Neues zu erarbeiten oder aber im Nachhinein analoge Strukturen bewusst zu machen. Analoge Strukturen und Vorgehensweisen finden sich sehr häufig in der Mathematik. Analog zur Grobabschätzung als Vorbereitung zur Erarbeitung der Kreisflächenformel können Inhaltsformeln für den Umfang des Kreises bzw. Oberfläche und Volumen der Kugel gewonnen werden.

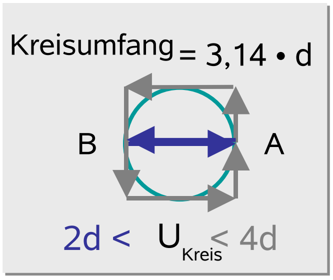

Abb. 3

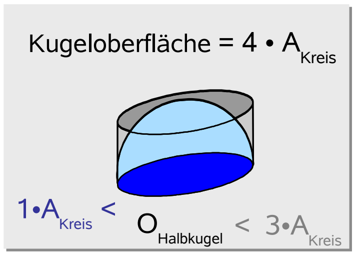

Abb. 4

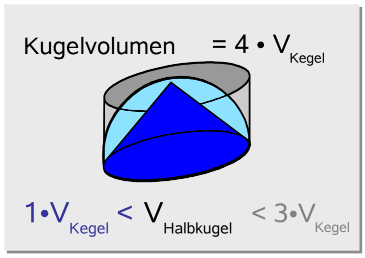

Abb. 5

Modularisieren. Für den Schüler stellen sich viele Lernbereiche in der Mathematik als eine unüberblickbare Ansammlung unzusammenhängender Regeln, Formeln etc. dar. Bei der Anwendung der aufgrund ihrer Fülle häufig unverstandenen Formeln haben die Schüler oft Schwierigkeiten, die Zeichen richtig zu interpretieren bzw. zuzuordnen. Bildet man geeignete Kategorien, lassen sich wenige einfache Regeln formulieren. Z.B. ist es überflüssig, für jeden Körper eigene Volumenformeln einprägen zu lassen. Wesentlich effektiver ist es, sich auf wenige leicht identifizierbare Kategorien wie Säulen ($V = Gh$), spitze Körper ($V = \frac{1}{3} Gh$) etc. zu beschränken. Die Anpassung an den speziellen Fall erfolgt dann durch Rückgriff auf wenige Kernmodule. Hierbei muss der Schüler immer wieder Tätigkeiten ausführen, die Kernkompetenzen mathematischen Arbeitens ausmachen. Dazu gehören Aktivitäten wie Körper klassifizieren, Flächenformen identifizieren oder Formeln in Formeln einzusetzen. Zentrale geometrische Vorstellungen sowie wichtige Formeln werden dabei trainiert und wachgehalten. Das zu lernende Wissen wird dadurch erheblich reduziert (Abb. 6), sodass es sich dauerhaft auch über die Schule hinaus einprägen lässt. Auf

Formeln für die Oberfläche von abwickelbaren Körpern kann sogar vollständig verzichtet werden. Unverzichtbar ist allerdings, dass der Schüler klare Vorstellungen von den Netzen der Körper hat. Bei der Zylinderoberfläche z.B. müsste der Schüler darüber hinaus über die Kernmodule verfügen: Formeln für die Kreisfläche, Rechtecksfläche und den Kreisumfang.

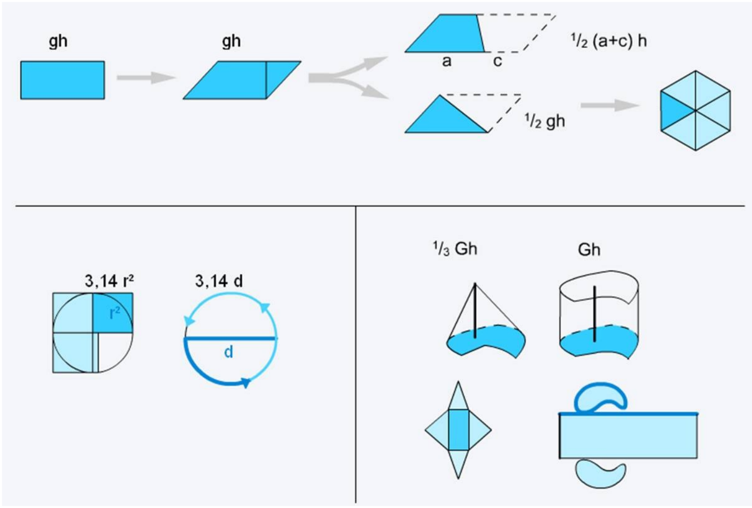

Abb. 6

Übersichtswissen schaffen. Eine weitere Form des innermathematischen Vernetzens besteht darin, im Unterricht explizit Übersichtswissen über größere Sachzusammenhänge zu schaffen. Dazu eignen sich besonders Übersichtsdarstellungen (vgl Abb. 6 und Abb. 7)

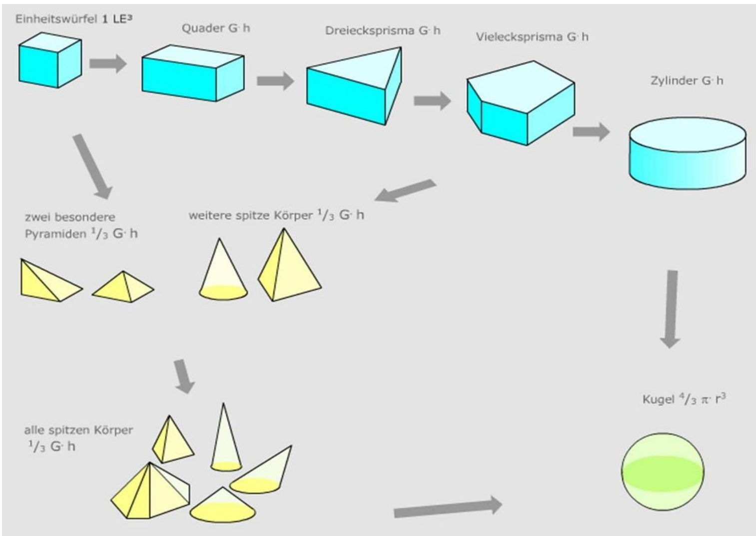

Abb. 7

3. Vernetzen mit Alltag bzw. Umwelt

Es ist ein wesentliches Bildungsziel, sich mittels Mathematik die Umwelt erschließen zu können. Darüber hinaus trägt es aber auch zur Nachhaltigkeit mathematischen Wissens bei, Mathematik aus dem Unterricht in den Alltag zu exportieren. Dies wirkt nicht nur motivierend, sondern soll auch auf den Unterricht zurückwirken, dass also Umweltaspekte mathematische Begriffe oder Aktivitäten evozieren. Hier sollen die „Freihandmathematik“ und das Beobachten und Hinterfragen mathematischer Begriffe in der Umwelt als geeignete Vernetzungsmöglichkeiten kurz vorgestellt werden.

Freihandmathematik. Mathematische Berechnungen sind oftmals zu kompliziert, um sie im Alltag anzuwenden. Da es dort meist nur auf relativ grobe Abschätzungen ankommt, sollten den Schülern Methoden an die Hand gegeben werden, die es ihnen erlauben, relevante Berechnungen näherungsweise auch ohne Formelsammlung, Taschenrechner, Stift und Papier durchzuführen.

Hierzu die Masseabschätzung einer Marmorkugel als Beispiel (Abb. 8). Um dieses Problem „freihändig“ angehen zu können, muss zunächst die Formel für das Kugelvolumen geeignet vereinfacht werden. Dazu werden in der Formel die Kreiszahl π und die 3 „weggekürzt“: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, das Kugelvolumen wird mit $V \approx 4r^3$ nur wenig unterschätzt. Geeignet interpretiert bedeutet dies: Das Kugelvolumen entspricht etwa vier Radiuswürfeln (Abb. 9) und damit dem halben Umwürfel. Dies ist sowohl leicht zu merken und als auch anzuwenden. Zur endgültigen Massebestimmung ist ein „Stützpunkt-Relativ-Prinzip“ hilfreich. Als Stützpunkte sollten die Schüler die Masse von Wasser des Volumens $1cm^3$, $1dm^3$ und $1m^3$ (1g, 1kg und 1t) auswendig kennen. Ebenfalls auswendig kennen sollten sie für einige wichtige andere Stoffe die Relativmasse (Holz 0,5fache, Stein 2fache, Eisen 8fache Masse gegenüber Wasser). Dies lässt die obige Marmorkugel ausgehend von der Annahme $d \approx 1m$ leicht im Kopf auf etwa 1t schätzen.

Abb. 8

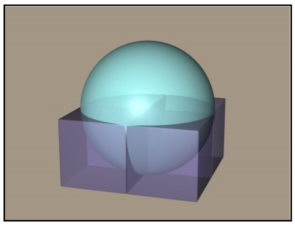

Abb. 9

Mathematik in der Umwelt hinterfragen. Relativ häufig wird im Unterricht angesprochen, wo sich in der Umwelt Repräsentationen mathematischer Begriffe wie z.B. Kreise, Abbildungen etc. finden lassen. Besonders interessant wird es aber, wenn die Frage nach dem *Warum?* gestellt wird. Die Antworten sind so vielfältig wie die Begriffe reich an Aspekten sind. Etwa tauchen Kreise als Rotationsfiguren (Teller), als Figuren minimalen Umfangs (Städte-Verteidigungsaspekt; Pinguingruppen-Wärmeaspekt), als geometrischer Ort gleichen Abstands von einem Zentrum (Baumscheiben, Hexenringe) oder als Figur hoher Symmetrie („Runder Tisch“ bei politischen Gesprächen) etc. auf.

Die hier an wenigen Beispielen angesprochenen Formen des Vernetzens hätten bei konsequenter Anwendung gravierende Auswirkungen auf den Unterricht. Sie würden aber auch die Nachhaltigkeit des Lernens erheblich unterstützen.

http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Vortrag/Vernetzen